BACALAUREAT 2001
SESIUNEA SPECIALĂ

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X + 2$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ şi polinomul $g = X^2 - X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = -1$.

c) Să se arate că numărul $a = f(y_1) + f(y_2)$ este natural.

d) Să se calculeze $b = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$.

2. **a)** Să se arate că $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ pentru orice $x > 0$.

Notăm cu $s_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $s_n = \dfrac{n}{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^n$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $B(-1, 1)$ şi $A_n(2n+1, 3n-2)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se arate că punctul A_n se află pe dreapta A_0A_1, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi are aceeaşi pantă cu dreapta A_0A_1.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y - 2$.

a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul real e astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$". Justificaţi răspunsul.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 12}{x+2}$.

a) Să se verifice identitatea $f(x) = x + 4 + \dfrac{4}{x+2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

d) Să se arate că funcţia f are un punct de maxim, un punct de minim şi să se determine coordonatele lor.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se verifice identitatea $I_3 = (I_3 - A)(I_3 + A)$.

d) Să se arate că matricea $I_3 - A$ este inversabilă şi să i se calculeze inversa.

e) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $(I_3 + A)^n = I_3 + nA$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

a) Să se determine a, b, $c \in \mathbb{R}$, pentru care $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x+3}$, $x > 0$.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)(e^x+2)(e^x+3)}$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + a}\, dx$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

d) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

e) Fie funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

SUBIECTUL I

1. **a)** Să se verifice identitatea $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, $(\forall)\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că dacă $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$, $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$, atunci $x=y=z$.

c) Să se rezolve ecuaţia $4^x+9^2+25^x=6^x+10^x+15^x$, $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se studieze semnul funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x)\le 1$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $A(1,1)$ şi dreapta $d:\ 5x+12y+9=0$.

a) Să se calculeze distanţa de la punctul A la dreapta d.

b) Să se scrie ecuaţia cercului $\mathscr{C}$ cu centrul în A şi care este tangent dreptei d.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

SUBIECTUL II

1. În inelul $\mathbb{Z}_6[X]$, se consideră polinomul $f=X^3-X$. Notăm cu $A\subset\mathbb{Z}_6$ mulţimea rădăcinilor polinomului f.

a) Să se verifice că $A=\mathbb{Z}_6$.

b) Să se găsească un polinom nenul $g\in\mathbb{Z}_6[X]$, $g\ne\pm f$, care să aibă mai multe rădăcini decât gradul său. Notăm cu $S_k=\hat{1}^k+\hat{2}^k+\hat{3}^k+\hat{4}^k+\hat{5}^k$, $k\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze S_1 şi S_2.

d) Să se arate că $S_k\in\{\hat{1},\hat{3}\}$, $(\forall)\ k\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ şi $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

a) Să se verifice că $f(x)=x-\dfrac{x}{x^2+1}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine $F(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{xf(x)}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea $G=(0,\infty)\times\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie "$\circ$" prin

$$(a_1,x_1)\circ(a_2,x_2)=(a_1a_2,a_1x_2+a_2x_1).$$

a) Să se arate că $((a_1,x_1)\circ(a_2,x_2))\circ(a_3,x_3)=(a_1,x_1)\circ((a_2,x_2)\circ(a_3,x_3))$, $(\forall)\ (a_1,x_1),\ (a_2,x_2),\ (a_3,x_3)\in G$.

b) Să se verifice că $(a,x)\circ(1,0)=(1,0)\circ(a,x)=(a,x)$, $(\forall)\ (a,x)\in G$.

c) Să se verifice că $(a,x)\circ\left(\dfrac{1}{a},-\dfrac{x}{a}\right)=\left(\dfrac{1}{a},-\dfrac{x}{a}\right)\circ(a,x)=(1,0)$, $(\forall)\ (a,x)\in G$.

d) Să se găsească două elemente (a_1, x_1) şi (a_2, x_2) din mulţimea G pentru care $(a_1, x_1) \circ (a_2, x_2) \neq (a_2, x_2) \circ (a_1, x_1)$.

e) Să se demonstreze că $(\forall)$ $(a, x) \in G$ şi $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$, există $(u, v) \in G$ astfel încât $\underbrace{(u, v) \circ (u, v) \circ \ldots \circ (u, v)}_{\text{de } n \text{ ori } (u,v)} = (a, x)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi funcţiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$ şi $F(x) = a_1 \sin x + \frac{a_2}{2} \sin 2x + \ldots + \frac{a_n}{n} \sin nx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

b) Să se verifice că funcţia $F(k\pi) = 0$, $(\forall)$ $k \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, atunci $F(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că dacă $F(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

Notăm cu $J(p, q) = \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \; dx$, $(\forall)$ $p, q \in \mathbb{N}^*$.

e) Utilizând formula $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că

$$J(p, q) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } p \neq q, p, q \in \mathbb{N}^* \\ \pi, & (\forall)\, p \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

f) Să se demonstreze că dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $XY - A$.

b) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

c) Să se calculeze A^2.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^3$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

c) Să se arate că există un număr real unic c, astfel încât $f(c) = c$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 0)$, $C(3, -1)$ şi dreapta $d : \ x - y = 0$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

b) Să se arate că punctele A, B şi C sunt coliniare.

c) Să se calculeze distanţa de la punctul C la dreapta d.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$ şi $g = X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile y_1, y_2, $y_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se determine y_1, y_2 şi y_3.

c) Să se arate că numărul $a = g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4)$ este natural.

d) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x + a^x - 4^x - 6^x$, unde $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(0)$.

c) Să se determine $a > 0$ astfel încât $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Pentru $a = 8$, să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră o funcţie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, cu proprietatea $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{Q}$.

a) Să se arate că $f(0) = 0$.

b) Să arate că $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{Q}$.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că
$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$.

d) Să se deducă egalitatea $f(nx) = nf(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{Q}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

e) Notăm $a = f(1)$, $a \in \mathbb{Q}$. Să se arate că $f(x) = ax$, $(\forall)\ x \in \mathbb{Q}$.

f) Să se demonstreze că dacă $(H, +)$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ şi este izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}, +)$, atunci $H = \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos \frac{\pi}{x}$ şi $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x + x \sin x$.

a) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

c) Să se verifice că $g'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

d) Să se arate că $g(x) > 1$, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

e) Utilizând teorema lui Lagrange pentru funcţia f, să se demonstreze inegalitatea $f(x+1) - f(x) > 1$, $(\forall)\ x > 2$.

f) Să se arate că $f(n) > n - 2$, $(\forall)\ n \geq 3$.

g) Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n^2}$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 5$.

a) Să se verifice că $f = (X-1)^2(X-2)^2 + 1$.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

c) Să se demonstreze că polinomul f nu se poate descompune în produs de două polinoame neconstante cu coeficienţi întregi.

2. Se consideră funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei g.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int g(x)\, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(6,0)$, $B(0,6)$, $C(12,12)$.

a) Să se determine aria triunghiului ABC.

b) Să se determine coordonatele punctului $M(u,v)$, astfel încât $MA = MB = MC$.

c) Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin punctele A, B şi C.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele cu coeficienţi în corpul $\mathbb{Z}_3$, $f = X^3 + \hat{2}X$ şi $g = X^5 + \hat{2}X$.

a) Să se determine rădăcinile polinomului f.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului g la polinomul f.

c) Notăm cu x_1, x_2 şi $x_3 \in \mathbb{Z}_3$ rădăcinile polinomului f. Să se calculeze $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ şi $T = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

2. Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{\ln(n^2+1)}$.

c) Să se demonstreze că funcţia f este bijectivă.

d) Notăm cu g inversa funcţiei f. Să se calculeze $g'(\ln 2)$.

SUBIECTUL III

Se consideră numerele reale distincte a, b, c, d, funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, $g(x) = x^3 + x + 1$ şi determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$.

a) Să verifice că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să arate că $\Delta = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

c) Să se verifice că $f'(a) = (a-b)(a-c)(a-d)$.

d) Se consideră determinantul $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix}$. Să se arate că $A = \Delta$.

e) Dezvoltând determinantul A după ultima linie, să se arate că $\dfrac{g(a)}{f'(a)} + \dfrac{g(b)}{f'(b)} + \dfrac{g(c)}{f'(c)} + \dfrac{g(d)}{f'(d)} = 1.$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^4}{4!}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.

b) Să se calculeze $f'(0)$, $f^{(2)}(0)$, $f^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^5}$.

d) Să se arate că $f'(x) \geq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

e) Să se deducă inegalitatea $f(x) < 0$, $(\forall)$ $x < 0$.

f) Se consideră funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$. Să se demonstreze că aria suprafeţei cuprinsă între graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$ este un număr din intervalul $(0,74; 0,75)$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X + 3$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ şi polinomul $g = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

- **a)** Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.
- **b)** Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.
- **c)** Să se arate că numărul $a = f(y_1) + f(y_2)$ este natural.
- **d)** Să se calculeze $b = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}\cdot$

- **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.
- **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,0)$, $B(0,4)$, $C(3,4)$.

- **a)** Să se determine aria triunghiului ABC.
- **b)** Să se determine perimetrul triunghiului ABC.
- **c)** Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

SUBIECTUL II

1. Se consideră binomul $a = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{100}$.

- **a)** Să se determine numărul de termeni raţionali din dezvoltarea binomului. Notăm cu S suma termenilor raţionali şi cu T suma termenilor iraţionali ai binomului.
- **b)** Să se arate că $S - T = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{100}$.
- **c)** Să se arate că $S > T$.
- **d)** Să se arate că $S - T < \dfrac{1}{3^{100}}\cdot$

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$.

- **a)** Să se arate că $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
Definim $B = aA + I_4$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se calculeze matricea $XY - A$.
- **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.
- **c)** Să se calculeze A^2.
- **d)** Să se verifice că $2B - B^2 = I_4$.

e) Să se arate că B este inversabilă, $(\forall)\ a \in \mathbb{R}$ şi să se calculeze inversa sa.

f) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $B^n = I_4 + naA$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $(\forall)\ a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră numărul real $a \in (0,1]$ şi şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(I_n)_{n\geq 1}$, $x_n = a - \dfrac{a^3}{3} + \dfrac{a^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{a^{2n-1}}{2n-1}$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se demonstreze identitatea

$$1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} = \frac{1 + (-1)^{n-1}x^{2n}}{1+x^2},\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*,\ (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

b) Integrând identitatea de la punctul a), să se arate că $x_n = \operatorname{arctg} a + (-1)^{n-1}I_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $a \in (0,1]$.

c) Să se arate că $0 \leq \dfrac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \operatorname{arctg} a$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 - \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{5} + \ldots + \dfrac{(-1)^n 4}{2n+1}\right)$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

1. În mulţimea permutărilor cu cinci elemente S_5 se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine numărul de inversiuni ale permutării σ.

b) Să se determine τ^{-1}.

c) Să se rezolve în S_5 ecuaţia $\tau \cdot \sigma = \sigma$.

2. **a)** Să se verifice identitatea $\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $(\forall)\ x > 0$.

b) Notăm cu $a_n = \dfrac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \dfrac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $a_n = \dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{n^2}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(2n, 3n+2)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se arate că punctul A_n se află pe dreapta A_0A_1, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că lungimea segmentului A_nA_{n+1} $n \in \mathbb{N}$, nu depinde de n.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_3$, $f = \hat{a}X + \hat{b}$ şi $g = X^6 + X^3 + \hat{1}$.

a) Să se verifice că pentru orice $\hat{a} \in \mathbb{Z}_3$, avem $\hat{a}^3 = \hat{a}$.

b) Să se arate că $(f(X))^3 = f(X^3)$.

c) Să se arate că $X^2 + X + \hat{1} = (X + \hat{2})^2$.

d) Să se descompună polinomul g în factori ireductibili, în inelul $\mathbb{Z}_3[X]$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2) - \operatorname{arctg} x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $x = -1$ este punct de maxim local pentru funcţia f.

c) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 3y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$ şi matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notăm cu A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se rezolve sistemul.

c) Să se găsească o matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $B \neq O_3$, astfel încât $AB = O_3$.

d) Să se arate că $A^n \neq I_3$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se arate că $\det\left(A + \dfrac{1}{n} I_3\right) \neq 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Folosind teorema lui Lagrange, să se arate că există $c(a)$, care depinde de a, $c(a) \in (2, 3)$ şi $d(a)$, care depinde de a, $d(a) \in (4, 5)$, astfel încât să avem $3^a - 2^a = a(c(a))^{a-1}$ şi $5^a - 4^a = a(d(a))^{a-1}$.

c) Să se arate că pentru orice funcţii $g : \mathbb{R} \to (2, 3)$ şi $h : \mathbb{R} \to (4, 5)$, ecuaţia $x(g(x))^{x-1} = x(h(x))^{x-1}$ are numai soluţiile $x = 0$ şi $x = 1$.

d) Să se rezolve ecuaţia $3^a + 4^a = 2^a + 5^a$, $a \in \mathbb{R}$.

e) Să se demonstreze că $3^x + 4^x > 2^x + 5^x$, $(\forall)\ x \in (0, 1)$.

f) Să se demonstreze că $\dfrac{2}{\ln 3} + \dfrac{3}{\ln 4} > \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{4}{\ln 5}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie şi militar real

SUBIECTUL I

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$.

a) Dezvoltând determinantul d, să se arate că $d = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b) Utilizând proprietăţile determinanţilor, să se arate că $d = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

c) Să se demonstreze identitatea $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$.

d) Să se rezolve ecuaţia $8^x + 27^x + 125^x = 3 \cdot 30^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,2)$ şi $C(-2,4)$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

b) Să se calculeze panta dreptei BC.

c) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = 2n - 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ formează o progresie aritmetică şi să se calculeze raţia progresiei.

b) Să se determine valoarea numărului natural n pentru care $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2001^2$.

c) Să se verifice că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = 2^{a_n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, formează o progresie geometrică.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $a_n < b_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \dfrac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!}{(n+1)!}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se verifice identitatea $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(n+1)!}$.

SUBIECTUL III

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

a) Să se verifice că $x \circ y = 2(x-1)(y-1) + 1$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se verifice că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea ”$\circ$”. Justificaţi răspunsul.

e) Să se rezolve ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x \circ x = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$.

d) Să se deducă inegalitatea $e^x \geq x^e$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$.

e) Să se demonstreze că $e^x > \dfrac{x^{e+1}}{e+1} + 1$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X + 2$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X - 1$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $f(x) = 0$.

c) Să se rezolve ecuaţia $(\log_3 x)^3 - \log_3 x^3 + 2 = 0$, $x > 0$.

2. Se consideră şirul cu termenul general $a_n = \dfrac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \dfrac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$.

a) Să se verifice identitatea $\dfrac{x^3-1}{x^3+1} = \dfrac{x-1}{x+1} \cdot \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$, $(\forall)\ x \neq -1$.

b) Să se arate că $a_n = \dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3a_n}{2}\right)^{n^2}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, 1)$, $B(-1, -2)$ şi $C(-1, 1)$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

b) Să se calculeze panta dreptei AC.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se calculeze A^2 şi A^4.

c) Să se determine o matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ pentru care $AB = BA = I_2$.

d) Să se calculeze A^{2001}.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax - \sin x$, unde a este parametru real.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(0)$.

c) Pentru $a \geq 1$, să se arate că $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \geq 0$.

d) Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)\, dx \leq \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ şi } a^2 - 2b^2 = 1\}$.

a) Să se arate că dacă $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ cu a, b, c, $d \in \mathbb{Q}$, atunci $a = c$ şi $b = d$.

b) Să verifice că $1 \in M$.

c) Să se arate că M este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor reale.

d) Să se arate că dacă $z \in M$, atunci $z \neq 0$ şi $\dfrac{1}{z} \in M$.

e) Să se găsească un element $z \in M$ astfel încât $0 < z < \frac{1}{10}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 0}$, definit prin $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ şi $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se verifice relaţia $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că $I_n \geq I_{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se deducă inegalităţile $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(nI_n - \frac{1}{2}\right)\ln n$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 - X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $f(X) = \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.

b) Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

d) Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ şi $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se deducă inegalitatea $f(x) \geq -1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$ şi $C(-1,0)$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

c) Să se verifice că $OA = OB = OC$, unde $O(0,0)$ este originea sistemului de coordonate.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se arate că $A + 2A^2 + \ldots + 2001A^{2001} = 1001A$.

2. **a)** Să se verifice identitatea $\frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3(x+1)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$, $(\forall)\ x > 0$.

Notăm cu $a_n = \frac{3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{2^3 \cdot 3^3} + \ldots + \frac{3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1}{n^3 \cdot (n+1)^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $a_n = \frac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n^{n^3}$.

SUBIECTUL III

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = 2xy + 6x + 6y + 15$.

a) Să se verifice că $x \circ y = 2(x+3)(y+3) - 3$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se verifice că $x \circ (-3) = (-3) \circ x = -3$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $(-15) \circ (-14) \circ \ldots \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 14 \circ 15 < -1$.

e) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$". Justificaţi răspunsul.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arctg}\, x$ şi şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \dfrac{1}{1+1^2} + \dfrac{1}{1+2^2} + \ldots + \dfrac{1}{1+n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f' este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

c) Aplicând teorema lui Lagrange, să se arate că $\dfrac{1}{1+(k+1)^2} < \text{arctg}(k+1) - \text{arctg}\, k < \dfrac{1}{1+k^2}$, $(\forall)$ $k \in \mathbb{N}$.

d) Să se arate că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

e) Utilizând rezultatul de la punctul c), să se arate că $a_n < \dfrac{\pi}{2}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine punctul de minim şi valoarea minimă a funcţiei f.

b) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x)\geq 2$, $(\forall)$ $x\in\mathbb{R}$.

c) Pentru $m=1$, să se rezolve ecuaţia $(f\circ f)(x)=0$.

2. **a)** Să se verifice identitatea $\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $(\forall)$ $x>0$.

Notăm cu $a_n=\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\dfrac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $a_n=\dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{n^2}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,2)$, $C(0,4)$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

b) Să se determine panta dreptei AB.

c) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f=X^3-3X+1$.

a) Să se calculeze $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ şi $f(2)$.

b) Să se arate că polinomul f are toate rădăcinile reale.

c) Să se demonstreze că rădăcinile polinomului f sunt numere iraţionale.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x-ax-1$, unde a este parametru real.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(0)$.

c) Să se determine valorile lui a pentru care $f(x)\geq 0$, $(\forall)$ $x\in\mathbb{R}$.

d) Să se deducă inegalitatea $\displaystyle\int_0^1 2^{x^2}\,dx\geq 1+\frac{\ln 2}{3}$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}4&-6\\2&-3\end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G=\{X(a)\,|\,a\in\mathbb{R}$ şi $X(a)=I_2+aA\}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se arate că $I_2\in G$.

d) Să se demonstreze că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, $(\forall)$ $a,b\in\mathbb{R}$.

e) Să se demonstreze că $X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(2001)=X(2002!-1)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ definit prin $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+3}\,dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{2x+3}\,dx$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se arate că $2I_{n+1} + 3I_n = \dfrac{1}{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dacă $x \in [0,1]$, să se arate că $x^n \geq x^{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $I_n \geq I_{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se deducă inegalităţile $\dfrac{1}{5(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{5n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + 4X^2 - 20X - 48$.

a) Să se calculeze $f(-2)$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

c) Să se rezolve ecuaţia $8^x + 4 \cdot 4^x - 20 \cdot 2^x - 48 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se deducă inegalitatea $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \geq \frac{2}{3}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, n^2)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine coordonatele punctelor A_0, A_1, A_2.

b) Să se calculeze perimetrul triunghiului $A_0A_1A_2$.

c) Să se determine panta dreptei A_7A_8.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se arate că dacă A, $B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

c) Să se arate că dacă $A \in G$ şi $\text{rang}(A) < 2$, atunci $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Să se arate că dacă $A \in G$ şi $\det(A) = 1$, atunci $A^4 = I_2$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

a) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$, pentru care $\dfrac{x}{(x+1)(x+4)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+4}$, $(\forall)\ x > 0$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+\alpha^2}\, dx$, unde $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

c) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinomul $f = (X+1)^{2n+1} + (X-1)^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, cu forma algebrică $f = a_{2n+1}X^{2n+1}a_{2n}X^{2n} + \ldots + a_1X + a_0$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1} \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze a_0.

b) Să se determine suma coeficienţilor polinomului f.

c) Să se calculeze a_{2n} şi a_{2n-1}.

d) Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n+1}$ şi $T = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n+1}^2$.
Considerăm $z = a + ib$ o rădăcină complexă a polinomului f, unde a, $b \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că $|a+1+ib| = |a-1+ib|$.

f) Să se arate că $a = 0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) Să se verifice că $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze, folosind metoda inducţiei matematice, că $\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \neq a$.

d) Să se calculeze $f^{(n)}(x)$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\int_2^n f(x)\ dx$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic şi sportiv real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ şi polinomul $g = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.

c) Să se arate că numărul $a = f(y_1) + f(y_2)$ este natural.

d) Să se calculeze $b = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se deducă inegalitatea $f(x) \geq 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\, dx \geq \frac{4}{3}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-1,-1)$ şi $C(1,-1)$.

a) Să se calculeze panta dreptei AB.

b) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei AC.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y + \sqrt{2}$.

a) Să se arate că Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul real e astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se precizeze dacă mulţimea $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$". Justificaţi răspunsul.

2. **a)** Să se verifice identitatea $\dfrac{3x^2 + 3x + 1}{x^3(x+1)^3} = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{(x+1)^3}$, $(\forall)\ x > 0$.

Notăm cu $a_n = \dfrac{3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1}{1^3 \cdot 2^3} + \dfrac{3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{2^3 \cdot 3^3} + \ldots + \dfrac{3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1}{n^3 \cdot (n+1)^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $a_n = \dfrac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n^{n^3}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se verifice identitatea $I_3 = (I_3 - A)(I_3 + A)$.

d) Să se arate că matricea $I_3 - A$ este inversabilă şi să se calculeze inversa ei.

e) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $(I_3 + A)^n = I_3 + nA$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(0)$.

c) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Să se determine asimptota la ramura spre $+\infty$ a graficului funcţiei f.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră ecuaţia $x^2 - mx + m - 1 = 0$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine m astfel încât ecuaţia să aibă rădăcini reale.

b) Să se determine m astfel încât ecuaţia să aibă rădăcini opuse.

c) Să se determine m astfel încât ecuaţia să aibă rădăcini inverse.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)^4 - x^4$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se determine punctul de inflexiune al graficului funcţiei f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(3,3)$ şi $C(-1,2)$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

b) Să se calculeze panta dreptei AB.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul C şi are aceeaşi pantă cu dreapta AB.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+3z=6 \\ x+3y+5z=9 \end{cases}$. Notăm cu A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se arate că sistemul este compatibil nedeterminat.

c) Să se determine acele soluţii (x, y, z) ale sistemului pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3^x - ax - 1$, unde a este parametru real.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(0)$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care $f(x) \geq 0,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ şi } X(a) = I_2 + aA\}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se verifice că $I_2 \in G$.

c) Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab),\ (\forall)\ a,\ b \in \mathbb{R}$.

d) Să se verifice că $X(a) \cdot X(-1) = X(-1),\ (\forall)\ a \in \mathbb{R}$.

e) Să se determine numărul $t \in \mathbb{R}$ pentru care $X(-100) \cdot X(-99) \cdot \ldots \cdot X(99) \cdot X(100) = X(t)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \dfrac{x^3}{3}$ şi $g(x) = \operatorname{arctg} x - x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(0)$ şi $g(0)$

c) Să se arate că $f'(x) \geq 0$ şi $g'(x) \leq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $f(x) > 0$ şi $g(x) < 0$, $(\forall)\ x > 0$.

e) Să se demonstreze că $\dfrac{2}{7} < \displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg}(x^2)\ dx < \dfrac{31}{100}\cdot$

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX + b$, cu a şi b parametri reali.

a) Să se determine a şi b, ştiind că polinomul f se divide cu $X + 1$ şi că $f(1) = 4$.

b) Pentru $a = 1$ şi $b = 2$ să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

c) Pentru $a = 1$ şi $b = 2$ să se rezolve inecuaţia $f(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\cdot$

a) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ şi $C(4, 4)$.

a) Să se calculeze panta dreptei AC.

b) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2 = 5A$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $A^n = 5^{n-1}A$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că matricea $A - A^2 + A^3 + \ldots + (-1)^{99}A^{100}$ are toate elementele strict negative.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\cdot$

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

SUBIECTUL III

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + x + y$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se verifice că $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$". Justificaţi răspunsul.

e) Să se rezolve ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = -1$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ şi $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_2^x f_n(t)\ dt$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $f_1(x) = x - 2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se verifice că $f_2(x) = \dfrac{(x-2)^2}{2!}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $f_n(x) = \dfrac{(x-2)^n}{n!}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(100)$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_0(3) + f_1(3) + \ldots + f_n(3)}{n}$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + X + m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine numărul real m, ştiind că polinomul f se divide cu polinomul $X + 1$.

b) Pentru $m = 2$ să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

c) Pentru $m = 2$, să se rezolve inecuaţia $f(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 2) - \ln x$

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Să se arate că $f'(x) < 0$ şi $f(x) > 0$, $(\forall)\ x > 0$.

c) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e f(x)\ dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, n^2)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se calculeze lungimea segmentului A_0A_1.

c) Să se arate că panta dreptei A_nA_{n+1} este un număr natural impar, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + 3z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$, unde a este parametru real.

a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

b) Să se determine valorile lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Să se stabilească dacă sistemul este compatibil pentru $a = -2$. Justificaţi răspunsul.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \dfrac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!}{(n+1)!}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se verifice identitatea $k \cdot k! = (k + 1)! - k!$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(n+1)!}$.

SUBIECTUL III

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y + \sqrt{5}$.

a) Să se arate că Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve ecuaţia $2^x \circ 4^x = 6 + \sqrt{5}$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$". Justificaţi răspunsul.

e) Se consideră numărul $a = \sqrt{5} \circ (-2\sqrt{5}) \circ (3\sqrt{5}) \circ \ldots \circ (19\sqrt{5}) \circ (-20\sqrt{5})$. Să se arate că $20 < a < 21$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 2^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{2^n}$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

a) Să se arate că $f(x) \geq 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $(f \circ f)(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se găsească un număr iraţional a pentru care $f(a) \in \mathbb{Q}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $x \geq \operatorname{arctg} x$, $(\forall)\ x \geq 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(4n - 3, 3n - 2)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se calculeze lungimea segmentului A_0A_1.

c) Să se arate că panta dreptei A_nA_{n+1} nu depinde de n, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $A + 2^2A^2 + \ldots + n^2A^n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}A$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \dfrac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2} + \dfrac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \dfrac{2\cdot n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se verifice identitatea $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $a_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{n^2}$.

SUBIECTUL III

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = -xy - x - y - 2$.

a) Să se verifice că $x \circ y = -(x+1)(y+1) - 1$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se verifice că $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $(-20) \circ (-19) \circ \ldots \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 19 \circ 20 < 0$.

e) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$". Justificaţi răspunsul.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

a) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$, pentru care $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$, $(\forall)\ x > 0$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $0 < f(x) \leq \dfrac{1}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

e) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

f) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + \ldots + f(\sqrt{n})\Big)$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Un autoturism A care consumă motorină este cu 40000000 lei mai scump decât un autoturism B care consumă benzină. Un litru de benzină costă 15000 lei, iar un litru de motorină costă 13000 lei. Un autoturism A consumă 5 litri de motorină la 100 km, iar un autoturism B consumă 7 litri de benzină la 100 km.

a) Să se determine cât costă motorina consumată de autoturismul A la 100 km.

b) Să se determine cât costă benzina consumată de autoturismul B la 100 km.

c) Să se afle după câţi km preţul autoturismului A adunat cu costul motorinei consumate de el este acelaşi cu preţul autoturismului B adunat cu costul benzinei consumate de el.

2. Numărul 1000 se măreşte cu 10% din valoarea sa şi se obţine numărul a. Numărul a se micşorează cu 10% din valoarea sa şi se obţine numărul b.

a) Să se calculeze a.

b) Să se calculeze b.

c) Cu ce procent trebuie micşorat numărul 1000, pentru a se obţine numărul b?

3. Scrierea zecimală a numărului $\dfrac{1}{37}$ este $0,a_1a_2\dots a_n\dots$.

a) Să se determine cifrele a_1 şi a_2.

b) Să se determine cifra a_{2001}.

c) Să se calculeze $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2001}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$ şi polinomul $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile y_1, $y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.

c) Să se arate că numărul $A = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + g(x_4)$ este întreg.

2. Se consideră binomul $(1 + \sqrt{2})^{100}$.

a) Să se scrie termenul din mijloc al dezvoltării binomului.

b) Să se determine numărul de termeni raţionali din dezvoltarea binomului.

c) Notăm cu S suma termenilor raţionali şi cu T suma termenilor iraţionali ai binomului. Să se demonstreze că $S > T$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2 = 6A$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $A^n = 6^{n-1}A$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2001} = \dfrac{6^{2001} - 1}{5}A$.

2. **a)** Să se arate că dacă $0 < x < 1$, atunci avem inegalităţile $x < \sqrt{x} < 1$.

b) Să se determine primele 20 de zecimale ale numărului $\sqrt{x}$, unde $x = 1 - \frac{1}{10^{20}}$.

SUBIECTUL IV

Piramida patrulateră regulată cu vârful V şi baza $ABCD$ are $VA = AB = a$.

a) Să se calculeze apotema piramidei.

b) Să se calculeze aria laterală a piramidei.

c) Să se calculeze înălţimea piramidei.

d) Să se calculeze volumul piramidei.

e) Să se arate că muchiile VA şi VC sunt perpendiculare.

f) Fie punctul $P \in (VC)$. Să se determine lungimea segmentului PC, astfel încât perimetrul triunghiului BPD să fie minim.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Un copac cu înălţimea de 10 m creşte în fiecare lună cu 4% din înălţimea sa.

a) Ce înălţime va avea copacul după o lună?

b) Ce înălţime va avea copacul după două luni?

c) Să se arate că după 20 de luni, copacul va avea o înălţime mai mare de 20 m.

2. a) Care este cel mai mic număr natural care, scris în baza zece, are 4 cifre?

b) Care este cel mai mare număr natural care, scris în baza zece, are 6 cifre?

c) Să se demonstreze că numărul 2^{100} scris în baza zece are exact 31 de cifre.

3. a) Să se verifice identitatea $\dfrac{1}{x^3-x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)x}-\dfrac{1}{x(x+1)}\right)$, $(\forall)\ x>1$.

b) Să se arate că $\dfrac{1}{k^3}<\dfrac{1}{k^3-k}$, $(\forall)\ k>1$.

c) Notăm cu $a_n=\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{n^3}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Să se demonstreze că $1\le a_n<\dfrac{5}{4}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se verifice că $A^2=8A$.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $A^n=8^{n-1}A$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-X^2+1$ cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\in\mathbb{C}$ şi polinomul $g=X^2-X+1$ cu rădăcinile $y_1,\ y_2\in\mathbb{C}$.

a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se verifice că $y_1^3=y_2^3=-1$.

c) Să se arate că numărul $B=g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4)$ este întreg.

SUBIECTUL III

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x\circ y=x+y+1$.

a) Să se arate că $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, $(\forall)\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul real e pentru care $x\circ e=e\circ x=x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că numărul $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2001$ nu este pătratul unui număr natural.

d) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$". Justificaţi răspunsul.

2. Să se arate că în orice mulţime de patru numere întregi există două care au suma sau diferenţa divizibilă cu 5.

SUBIECTUL IV

Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia de lungime a.

a) Să se calculeze aria totală a cubului.

b) Să se calculeze lungimea segmentului AC'.

c) Să se calculeze volumul tetraedrului $B'ABC$.

d) Să se calculeze volumul tetraedrului $ACB'D'$.

e) Să se calculeze distanţa de la punctul A la planul $(CD'B')$.

f) Notăm cu O centrul feţei $BCC'B'$. Să se afle lungimea minimă pe care o are un drum dintre A şi O pe suprafaţa cubului.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Trei tractorişti au de arat împreună o suprafaţă de 130 de ha. După ce primul a arat două treimi din suprafaţa sa, al doilea a arat trei sferturi din suprafaţa sa, iar al treilea a arat două cincimi din suprafaţa sa, toţi au rămas cu suprafeţe egale de arat.

- **a)** Ce procent din suprafaţa pe care trebuia să o are al doilea tractorist reprezintă suprafaţa pe care trebuia să o are primul tractorist?
- **b)** Ce suprafaţă trebuia să are fiecare tractorist?
- **c)** Ce suprafaţă a arat fiecare tractorist?

2. Se consideră numărul $a = 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 60$.

- **a)** Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care 2^n divide numărul a.
- **b)** Care este numărul de zerouri cu care se termină numărul a scris în baza zece?
- **c)** Să se demonstreze că numărul a nu este pătrat perfect.

3. Fie suma $S = \dfrac{1}{39} + \dfrac{1}{40} + \ldots + \dfrac{1}{50}$.

- **a)** Câţi termeni are suma S?
- **b)** Să se arate că $\dfrac{6}{25} < S < \dfrac{4}{13}$.
- **c)** Dacă $\dfrac{1}{39} + \dfrac{1}{40} + \ldots + \dfrac{1}{50} = \dfrac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$ prime între ele, să se arate că b este număr par şi că a se divide cu 89.

SUBIECTUL II

1.
- **a)** Să se verifice identitatea $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, $(\forall)\ a, b, c \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se arate că $2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, $(\forall)\ a, b, c \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se rezolve ecuaţia $8^x + 27^x + 125^x = 3 \cdot 30^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie ”$\circ$” definită prin $x \circ y = x + y - 10$.

- **a)** Să se arate că Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se arate, utilizând metoda inducţiei matematice, că $2 \circ 2^2 \circ 2^3 \circ \ldots \circ 2^n = 2^{n+1} - 10n + 8$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.
- **d)** Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ este parte stabilă în raport cu legea ”$\circ$”. Justificaţi răspunsul.

SUBIECTUL III

1. Se consideră polinomul $f = (X + i)^{10} + (X - i)^{10}$ având forma algebrică $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \ldots + a_1X + a_0$.

- **a)** Să se calculeze a_0.
- **b)** Să se determine a_{10}, a_9, a_8.
- **c)** Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.
- **d)** Să se arate că polinomul f are toţi coeficienţii reali.
- **e)** Se consideră z o rădăcină complexă a polinomului f. Să se arate că $|z + i| = |z - i|$.
- **f)** Să se arate că polinomul f are toate rădăcinile reale.

2. Să se demonstreze că numărul 50! nu este nici pătrat perfect, nici cub perfect.

SUBIECTUL IV

Se consideră piramida triunghiulară regulată cu vârful A şi baza BCD. Se ştie că $AB = BC = a$.

a) Să se calculeze aria totală a piramidei.

b) Să se calculeze înălţimea piramidei.

c) Să se calculeze volumul piramidei.

Fie A', B', C', D' centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ACD, ABD şi respectiv ABC.

d) Să se demonstreze că dreptele AA', BB', CC' şi DD' sunt concurente.

e) Notăm punctul de concurenţă al dreptelor AA', BB', CC' şi DD' cu G. Să se arate că $GA = 3GA'$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

1. Un călător are de parcurs un traseu lung de 1275 km. În prima zi el parcurge 1 km, în a doua zi parcurge 2 km,..., în a n-a zi parcurge n km.

a) Câţi km a parcurs călătorul după primele 3 zile?

b) Câţi km a parcurs călătorul după primele 7 zile?

c) După câte zile parcurge călătorul tot traseul?

2. Se consideră numerele $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 25$ şi $b = 26 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 50$.

a) Să se arate că numărul a nu este pătrat perfect.

b) Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care 10^n divide a.

c) Să se demonstreze că $\dfrac{b}{a}$ este număr natural.

3. Se consideră mulţimea A formată din numere naturale care împărţite la 3, 4 respectiv 5 dau resturile 2, 3 respectiv 4.

a) Să se arate că dacă $a \in A$, atunci 60 divide $a + 1$.

b) Să se determine cel mai mic element din mulţimea A.

c) Să se determine elementele din mulţimea A conţinute în intervalul $(100, 200)$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se verifice că $A^2 = -A$.

c) Să se determine numărul întreg x, pentru care $A + 2A^2 + \ldots + 2001A^{2001} = xA$.

2. Se consideră polinomul $f = (X + i)^5 - (X - i)^5$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $f = 2i(5X^4 - 10X^2 + 1)$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

c) Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ şi $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

SUBIECTUL III

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + x + y$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$, $(\forall)$ x, $y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)$ x, y, $z \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $x \circ (-1) = -1$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $(-2001) \circ (-2000) \circ \ldots \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2000 \circ 2001$.

e) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$". Justificaţi răspunsul.

2. Să se arate că dacă $p > 2$ şi $q > 2$ sunt numere prime consecutive, atunci numărul $\dfrac{p+q}{2}$ este natural şi nu este prim.

SUBIECTUL IV

Se consideră piramida regulată cu vârful V şi baza ABC. Se ştie că $VA = 2a$ şi $m(\sphericalangle AVB) = 30^\circ$.

a) Să se calculeze lungimea înălţimii din A a triunghiului AVB.

b) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

c) Să se calculeze apotema piramidei.

d) Să se calculeze aria totală a piramidei.

e) Fie punctele $M \in (VA)$, $N \in (VB)$ şi $P \in (VC)$, astfel încât $VM = MA$ şi perimetrul triunghiului MNP să fie minim. Să se calculeze perimetrul triunghiului MNP.

Varianta 5

SUBIECTUL I

1. Trei muncitori A, B şi C efectuează o lucrare. Dacă muncitorii A şi B lucrează împreună, termină lucrarea în 12 zile, dacă muncitorii B şi C lucrează împreună, termină lucrarea în 20 zile, iar dacă muncitorii A şi C lucrează împreună, termină lucrarea în 15 zile.

a) În câte zile ar termina lucrarea fiecare muncitor dacă ar lucra singur?

b) În câte zile ar termina lucrarea cei trei muncitori dacă ar lucra împreună?

c) Pentru o zi de muncă lucrată împreună ei primesc în total 600000 de lei. Ce sumă revine fiecărui muncitor zilnic, ştiind că ei sunt plătiţi direct proporţional cu munca prestată?

2. **a)** Să se arate că $\frac{1}{2} < \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{19} < 1$.

b) Dacă $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{19} = \frac{a}{b}$, cu a, $b \in \mathbb{N}^*$ prime între ele, să se arate că b este par şi a este impar.

c) Să se arate că a se divide cu 29.

3. Notăm cu A mulţimea numerelor naturale de 4 cifre distincte, formate cu cifrele 2, 3, 5 şi 6.

a) Câte elemente are mulţimea A?

b) Câte elemente ale mulţimii A sunt numere pare?

c) Să se calculeze suma numerelor impare din mulţimea A.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^9 + (X+1)^6$ având forma algebrică $f = a_9X^9 + a_8X^8 + \ldots + a_1X + a_0$ şi polinomul $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile y_1, $y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

b) Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.

c) Să se calculeze $f(y_1)$ şi $f(y_2)$.

d) Să se arate că $a_0 + a_3 + a_6 + a_9 = \frac{f(1) + f(y_1) + f(y_2)}{3}$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $AB = BA$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $(A-B)^n = A^n + (-1)^n B^n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $(A+B)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie ”$\circ$” definită prin $x \circ y = -xy + x + y$.

a) Să se verifice că $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $(-20) \circ (-19) \circ \ldots \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 19 \circ 20$.

e) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea ”$\circ$”. Justificaţi răspunsul.

2. Să se arate că un produs de trei numere naturale nenule consecutive nu este cub perfect.

SUBIECTUL IV

Se consideră piramida triunghiulară regulată cu vârful A şi baza BCD. Se ştie că $AB = 5$ şi $BC = 5\sqrt{2}$.

a) Să se arate că AB este perpendiculară pe dreapta AC.

b) Să se calculeze aria totală a piramidei.

c) Să se calculeze volumul piramidei.
Fie punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ şi $P \in (AD)$, astfel încât $AM = 1$, $AN = 2$ şi $AP = 3$.

d) Să se calculeze perimetrul triunghiului MNP.

e) Să se calculeze volumul corpului $MNPBCD$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$, unde a şi b sunt parametri reali.

a) Să se determine a şi b, ştiind că polinomul $X - 1$ divide pe f şi $f(-1) = -4$.

b) Se consideră polinomul $g = X^3 - X^2 + X - 1$. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $g(x) = 0$.

c) Să se afle câtul şi restul împărţirii polinomului g la polinomul $X^2 + X$.

d) Să se afle câte valori reale poate lua expresia $E = x_1^2 + x_2 + x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului g, permutate în toate modurile.

e) Să se rezolve ecuaţia $g(2^x) = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^3 - x^3$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se studieze semnul funcţiei f'.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

d) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(0) + f(1) + \ldots + f(n)}{n^3}$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie ”$\circ$” definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $x \circ (-2) = (-2) \circ x = -2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

e) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea ”$\circ$”. Justificaţi răspunsul.

SUBIECTUL III

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x^2 - 3x + 2}$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ să avem $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$.

b) Să se determine primitivele funcţiei f pe intervalul $(2, \infty)$.

c) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

d) Să se determine asimptotele verticale la graficul funcţiei f.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_3^n f(x)\, dx$.

SUBIECTUL IV

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se verifice că $A^2 = 2A$.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $A^n = 2^{n-1}A$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $A + A^2 + \ldots + A^{2001} = (2^{2001} - 1)A$.

e) Să se calculeze $(A - I_2)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^2 + 2X + 4$ cu rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^3 - 8$.

b) Să se arate că $x_1^3 = x_2^3 = 8$.

c) Să se găsească o valoare $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, pentru care $f(a) \in \mathbb{N}$.

d) Dacă z este o rădăcină a polinomului f, să se calculeze $A = z^{20} + 2z^{19} + 2^2z^{18} + \ldots + 2^{19}z + 2^{20}$.

e) Să se rezolve ecuaţia $f(2^x) = 7$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b şi c sunt parametri reali.

a) Să se determine a, b şi c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiţii: $f(0) = 0$, $f'(1) = -2$ şi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{2}{3}\cdot$

Considerăm că $a = -1$, $b = 2$ şi $c = 0$.

b) Să se calculeze $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n)}{n^2}\cdot$

SUBIECTUL II

1. Se consideră binomul $(1 + x)^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine n ştiind că suma coeficienţilor binomiali este 64.

b) Pentru $n = 6$ să se determine termenul din mijloc al dezvoltării.

c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$, ştiind că $n = 6$ şi că termenul care îl conţine pe x^2 este egal cu 60.

2. Se consideră progresia aritmetică cu termenul general $a_n = 3n + 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine raţia progresiei.

b) Să se verifice identitatea $\displaystyle\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că $\displaystyle\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2000}a_{2001}} = \frac{2000}{a_1a_{2001}}\cdot$

SUBIECTUL III

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}\cdot$

a) Să se verifice că $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x - 1}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

c) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f.

d) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

e) Să se arate că $x = 1$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f.

f) Să se calculeze $\displaystyle\int_2^3 f(x)\, dx$.

SUBIECTUL IV

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ şi } X(a) = I_2 + aA\}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$, $a \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se verifice că $I_2 \in G$.

d) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - ab)$, $(\forall)\ a, b \in \mathbb{R}$.

e) Să se determine $t \in \mathbb{Z}$, astfel încât $X(-10) \cdot X(-9) \cdot \ldots \cdot X(9) \cdot X(10) = X(t)$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = aX^3 + bX + c$, unde a, b şi c sunt parametri reali.

a) Să se determine a, b şi c ştiind că polinomul $X - 1$ divide polinomul f şi că polinomul f împărţit la $X^2 + 1$ dă restul $-4X + 2$.

Se consideră polinomul $g = X^3 - 3X + 2$.

b) Să se rezolve ecuaţia $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

c) Să se determine valoarea maximă a expresiei $E = x_1^2 + x_2 + x_3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului g, permutate în toate modurile.

d) Să se rezolve ecuaţia $g(3^x) = 0$

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}\cdot$

a) Să se verifice că $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{n}^{2n} f(x)\ dx$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = -xy + x + y$.

a) Să se verifice că $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se verifice că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că
$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (-1)^{n-1}(x_1 - 1)\cdot(x_2-1)\cdot\ldots\cdot(x_n-1) + 1$, $(\forall)\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$". Justificaţi răspunsul.

SUBIECTUL III

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 4x - 3$.

a) Să se verifice că $f(2-x) = f(2+x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia f este concavă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} \int_{x}^{x+1} f(t)\ dt$.

e) Să se determine $a \in (1, 3)$ cu proprietatea că dreapta $x = a$ desparte suprafaţa plană cuprinsă între graficul funcţiei f şi axa Ox în două regiuni de arii egale.

SUBIECTUL IV

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se verifice că $A^2 = 3A$.

c) Să se arate că $A^n = 3^{n-1}A$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2001} = \dfrac{3^{2001} - 1}{2}A$.

e) Să se arate că dacă avem trei progresii aritmetice de câte trei termeni: a, b, c, respectiv x, y, z, respectiv u, v, w, atunci determinantul matricei $\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$ este egal cu 0.

Varianta 4

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = (X+1)^{20} + (X-1)^{20}$ având forma algebrică $f = a_{20}X^{20} + a_{19}X^{19} + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se calculeze a_0, a_1 şi a_2.

b) Să se calculeze $f(1)$.

c) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{C}$.

d) Să se calculeze $f(i)$.

e) Să se demonstreze că $a_0 + a_4 + a_8 + \ldots + a_{20} = \dfrac{1}{4}[f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i)]$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x) \geq -1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

e) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y + \sqrt{2}$.

a) Să se verifice că $x \circ y = y \circ x$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Se consideră numărul $a = 1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2001 - 2000\sqrt{2}$. Să se arate că a este număr întreg, dar nu este pătratul unui număr natural.

e) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$". Justificaţi răspunsul.

SUBIECTUL III

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

a) Să se verifice că $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $(\forall)\ x > 0$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

c) Să se arate că $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ dx$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} \int_x^{x+1} f(t)\ dt$.

f) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} [f(1) + f(2) + \ldots + f(n)]$.

SUBIECTUL IV

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $AB = BA$.

b) Să se arate că $A^2 = 4A$.

c) Să se arate că $B^2 = 2B$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se arate că $(A+B)^n = 4^{n-1}A + 2^{n-1}B$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1,\ x_2 \in \mathbb{C}$.

- **a)** Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^3 - 1$.
- **b)** Să se arate că $x_1^3 = x_2^3 = 1$.
- **c)** Să se calculeze $x_1^{2001} + x_2^{2001}$.
- **d)** Dacă z este o rădăcină a polinomului f, atunci să se calculeze $z^{20} + z^{19} + \ldots + z + 1$.
- **e)** Să se găsească o valoare $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, pentru care $f(a) \in \mathbb{N}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

- **a)** Să se verifice că $f(-x) = f(x),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine asimptota spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
- **c)** Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}$.
- **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}$.
- **e)** Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = -1$ şi $x = 1$.
- **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\ dt$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie ”$\circ$” definită prin $x \circ y = x + y + 1$.

- **a)** Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),\ (\forall)\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea ”$\circ$”. Justificaţi răspunsul.
- **d)** Să se arate că numărul $a = 1 \circ 3 \circ 5 \circ \ldots \circ 2001 - 1000$ este pătratul unui număr natural.
- **e)** Să se rezolve ecuaţia $2^x \circ 4^x = 7,\ x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

- **a)** Să se verifice identitatea $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1},\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$.
- **b)** Să se arate că $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
- **c)** Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
- **d)** Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$.
- **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ dx$.
- **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} [f(1) + f(2) + \ldots + f(n)]$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirul cu termenul general $a_n = 2n + 3,\ n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ formează o progresie aritmetică şi să se determine raţia progresiei.

b) Să se verifice identitatea $\dfrac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a_k a_{k+1}} - \dfrac{1}{a_{k+1} a_{k+2}}\right)$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că $\dfrac{1}{a_1 a_2 a_3} + \dfrac{1}{a_2 a_3 a_4} + \ldots + \dfrac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a_1 a_2} - \dfrac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că pentru orice număr natural nenul n avem $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 2001$.

e) Să se arate că şirul cu termenul general $b_n = 2^{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, formează o progresie geometrică şi să se determine raţia sa.

f) Să se calculeze $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinoamele cu coeficienţi reali $f = X^3 + aX + b$ şi $g = X^3 - 3X + 2$.

a) Să se determine parametri reali a şi b, ştiind că polinomul f se divide cu $X - 1$ şi că $f(-1) = 4$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $g(x) = 0$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $g(x) < 0$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $g(2^x) = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^\pi$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \geq 0$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{x^\pi - e^\pi}{x - e}$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $[0, \infty)$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-5, 0)$, $C(4, -3)$ şi $O(0, 0)$.

a) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

b) Să se verifice că $OA = OB = OC$.

c) Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin punctele A, B, C.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea permutărilor cu cinci elemente S_5 se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ şi $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine numărul de inversiuni ale permutării σ.

b) Să se calculeze $\sigma \cdot \tau$ şi $\tau \cdot \sigma$.

c) Să se rezolve în S_5 ecuaţia $x \cdot \sigma = \tau$.

2. Se consideră funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $f_0(x) = x + 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ şi $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f_n(t)\, dt$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $f_1(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2!}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $f_n(x) = \dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(1)$.

SUBIECTUL III

În mulţimea matricelor $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in (0, \infty),\ b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se verifice că matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

c) Să se arate că, dacă $A \in G$, atunci există $B \in G$, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

d) Să se găsească două matrice A, $B \in G$ pentru care $A \cdot B \neq B \cdot A$.

e) Să se demonstreze că, pentru orice matrice $A \in G$ şi $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$, există o matrice $X \in G$, astfel încât $X^n = A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

a) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia f' este strict crescătoare.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$.

e) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că pentru $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, avem inegalităţile

$$\left(x - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \left(x - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k-1}{n}\right), \ (\forall)\, x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right].$$

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinoamele cu coeficienţi reali $f = X^3 + aX + b$ şi $g = X^3 - 3X - 2$.

a) Să se determine parametri reali a şi b, ştiind că polinomul f are rădăcina dublă $x = -1$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $g(x) = 0$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $g(x) > 0$.

d) Să se rezolve în $(0, \infty)$ ecuaţia $g(\log_2 x) = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \pi^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\pi^x - \pi^e}{x - e}$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul $\mathscr{C}$ de ecuaţie $x^2 + y^2 = 25$.

a) Să se verifice că punctul $A(3, 4)$ se află pe cercul $\mathscr{C}$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul $\mathscr{C}$ care trece prin punctul $A(3, 4)$.

c) Să se calculeze aria triunghiului format de axele de coordonate şi tangenta la cerc care trece prin punctul $A(3, 4)$.

SUBIECTUL II

1. a) Să se arate că pentru orice numere reale a, b, c, d este adevărată identitatea
$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - da)$.

b) Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$, atunci $a = b = c = d$.

c) Să se rezolve ecuaţia $4^x + 9^x + 25^x + 49^x = 6^x + 15^x + 35^x + 14^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţiile $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$, $g(x) = 2x^{n+1} - (n+1)x^2 + n - 1$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Să se verifice că $f'(x) = nx^{n-2}g(x)$, $x \geq 0$.

b) Să se calculeze $g'(x)$, $x \geq 0$.

c) Să se arate că $g(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \geq 0$.

d) Să se arate că $x^n - \dfrac{1}{x^n} \geq n\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$, $(\forall)\ x \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_3(\mathbb{Z}_2)$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle|\ \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ şi matricea $I_3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $I_3 \in G$.

b) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

c) Să se demonstreze că dacă $A \in G$, atunci există $B \in G$, astfel încât $A \cdot B = I_3$.

d) Să se calculeze numărul de elemente ale mulţimii G.

e) Să se găsească două matrice $A, B \in G$ pentru care $A \cdot B \neq B \cdot A$.

f) Să se arate că, oricare ar fi matricea $A \in G$, avem $A^4 = I_3$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n \, dx$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $0 \le x - x^2 \le \frac{1}{4}$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$.

c) Să se deducă inegalităţile $0 \le I_n \le \frac{1}{4^n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Utilizând metoda integrării prin părţi, să se arate că $I_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{n-1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

e) Să se arate că $0 < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1} < \sqrt{\frac{3}{2n+3}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n I_n = 0$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + X - 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine x_1, x_2, x_3.

b) Să se arate că $x_1^{2001} + x_2^{2001} + x_3^{2001}$ este un număr întreg.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(2^x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\ln(x^2 + 1) - \ln(\pi^2 + 1)}{x - \pi}$.

c) Să se determine intervalele de concavitate şi de convexitate ale funcţiei f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul $\mathscr{C}$ de ecuaţie $x^2 + y^2 = 100$.

a) Să se verifice că punctul $A(6, 8)$ se află pe cercul $\mathscr{C}$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul $\mathscr{C}$ care trece prin punctul $A(6, 8)$.

c) Să se calculeze aria triunghiului format de axele de coordonate şi tangenta la cerc care trece prin punctul $A(6, 8)$.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea numerelor complexe se consideră submulţimea $G = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 + b^2 = 1\}$.

a) Să se verifice că $1 \in G$.

b) Să se arate că, dacă $z, w \in G$, atunci $z \cdot w \in G$.

c) Să se arate că, dacă $z \in G$, atunci $\dfrac{1}{z} \in G$.

d) Să se găsească un element $z \in G$, $z = a + ib$, astfel încât $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Să se arate că $2 < f(x) < 3$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$. Notăm cu A matricea sistemului, cu $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi cu $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se rezolve sistemul.

c) Să se arate că $A^n \neq I_3$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se găsească o matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $B \neq O_3$, pentru care $A \cdot B = O_3$.

e) Să se arate că pentru orice $r \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ avem $\det(A + rI_3) \neq o$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2001}$ şi $g(x) = 2001x^{2002} - 2002x^{2001} + 1$.

a) Să se verifice că $f(x) = \dfrac{x^{2002} - 1}{x - 1}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

b) Să se arate că $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

c) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $g(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

e) Să se demonstreze că funcţia f este bijectivă.

f) Notăm cu $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inversa funcţiei f. Să se calculeze $\displaystyle\int_1^{2002} h(x)\ dx$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie şi militar real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 5X - 6$.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x) \geq 0$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(2^x) = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{2^x - 2^\pi}{x - \pi}$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$ şi $C(1, -1)$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

c) Să se calculeze panta dreptei BC.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Să se verifice că $x \circ y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Să se găsească două elemente $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $x \circ y \in \mathbb{Z}$.

d) Să se rezolve ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x \circ x = 3$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.

a) Să se verifice că $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x - 1}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_2^x f(t)\, dt$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru $a \in \mathbb{R}$ definim matricea $B = aA + I_3$.

a) Să se calculeze $A - XY$.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se arate că $2B - B^2 = I_3$.

d) Să se arate că matricea B este inversabilă şi să se calculeze inversa sa.

e) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $B^n = I_3 + anA$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ şi $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2}\cdot$

a) Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x \in [0, \infty)$.

b) Să se calculeze $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$ şi $g'(0)$.

c) Să se arate că $f'(x) < 0$ şi $g'(x) >$, $(\forall)\ x > 0$.

d) Să se deducă inegalitatea $f(x) < 0$ şi $g(x) > 0$, $(\forall)\ x > 0$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n \int_0^1 \ln(1 + x^n)\ dx$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $f = (X^2+1)(X^2+X+1)$.

b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

c) Să se arate că $f(x) \geq \dfrac{3}{4}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

2. Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = x^e$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x^e - \pi^e}{x - \pi}$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $(0,\infty)$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n,-n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se verifice că punctul A_n se află pe dreapta A_0A_1, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

c) Să se calculeze lungimea segmentului A_nA_{n+1}.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$. Notăm cu A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se rezolve sistemul.

c) Să se determine acele soluţii (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2^x + 3^x)(2^{-x} + 3^{-x})$.

a) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $f(x) \geq f(0)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. Definim funcţia $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{Z}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$ prin $f(x) = Ax$, unde $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$.

a) Să se verifice că $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$.

b) Să verifice că $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$ şi $\lambda \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că, dacă $\det(A) \neq 0$, atunci funcţia f este injectivă.

d) Să se arate că, dacă $\det(A) \in \{1,-1\}$, atunci funcţia f este bijectivă.

e) Să se arate că, dacă funcţia f este bijectivă, atunci $\det(A) \in \{1, -1\}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-5)$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

b) Utilizând teorema lui Rolle, să se arate că f' are patru rădăcini reale, distincte, situate în intervalele $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$ şi $(4,5)$.

c) Să se verifice identitatea $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \ldots + \dfrac{1}{x-5}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R} - A$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

d) Derivând identitatea de la punctul c), să se arate că $\dfrac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = -\left[\dfrac{1}{(x-1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(x-5)^2}\right]$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R} - A$.

e) Să se arate că $(f'(x))^2 > f(x)f''(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + X - 2$.

a) Să se calculeze $f(2)$.
b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = 0$.
c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x) > 0$.
d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(2^x) = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\ln x - \ln \pi}{x - \pi}$.
c) Să se arate că funcţia f este concavă pe $(0, \infty)$.
d) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$ şi $C(4, 5)$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.
b) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.
c) Să se calculeze panta dreptei AC.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y + 11$.

a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.
b) Să se găsească două elemente a, $a \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
c) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n > 2001$.
d) Să se determine cel mai mare număr natural n, pentru care $2 \circ 2^2 \circ \ldots \circ 2^n < 2001$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

a) Să se verifice că $f(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
c) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^5} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = I_3 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

c) Să se verifice că $2B - B^2 = I_3$.

d) Să se arate că matricea B este inversabilă şi să se determine inversa ei.

e) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $B^n = I_3 + naA$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $(1-x^2)^n \geq (1-x^2)^{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\ x \in [0,1]$.

c) Să se deducă inegalitatea $I_{n+1} \leq I_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

e) Să se arate că $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic şi sportiv real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^2 + aX + b$ şi polinomul $g = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile x_1, $x_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine parametri reali a şi b, ştiind că polinomul f împărţit la $X - 1$ dă restul 3 şi $f(-1) = 1$.

b) Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $g(x) < 3$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $g(2^x) = 3$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x} + x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{2^{-x} + x - 2^{-\sqrt{2}} - \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$.

c) Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

d) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ şi $C(\pi, \pi)$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

b) Să se arate că punctul C se află pe dreapta AB.

c) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se arate că $A^2 = 10A$.

c) Să se arate că $A^{2001} \neq I_3$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

a) Să se verifice că $f(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^5} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

SUBIECTUL III

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y - 1$.

a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul real e astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se găsească două elemente $a,\, b \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

d) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n > 2001$.

e) Să se determine cel mai mare număr natural nenul n, pentru care $2 \circ 2^2 \circ \ldots \circ 2^n < 2001$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3}$.

a) Să se verifice că $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}$, $(\forall)\ x \geq 0$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \geq 0$.

c) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

d) Să se determine asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\ln n \cdot \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, dx\right]$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $f(X) = \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.

b) Să se arate că $f(x) > \frac{1}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ şi $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\log_3 x - \log_3 3}{x - 3}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx$.

d) Să se arate că funcţia f este concavă pe $\mathbb{R}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(4, 3)$ şi $C(-3, -4)$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei AC.

c) Să se calculeze panta dreptei AB.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$.

a) Să se verifice că $f(x) = (x + 1)^2 - 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(f \circ f)(x) = 0$.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}})(x) = (x+1)^{2^n} - 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{3x} + 2$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare.

c) Să se determine asimptota spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ şi matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in G$.

b) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $a \cdot B \in G$.

c) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

d) Să se arate că, dacă $A \in G$ şi $\operatorname{rang}(A) < 2$, atunci $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

e) Să se arate că, dacă $A \in G$ este inversabilă şi $A^{-1} \in G$, atunci $\det(A) = 1$.

f) Să se arate că, dacă $A \in G$ şi $\det(A) = 1$, atunci $A^4 = I_2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4-x^2$.

a) Să se verifice că $f(-x)=f(x),\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

c) Să se determine $a\in(-2,2)$ cu proprietatea că dreapta $x=a$ desparte suprafaţa plană cuprinsă între graficul funcţiei f şi axa Ox în două regiuni de arii egale.

d) Să se determine $b\in(0,4)$ cu proprietatea că dreapta $y=b$ desparte suprafaţa plană cuprinsă între graficul funcţiei f şi axa Ox în două regiuni de arii egale.

e) Să se arate că dreptele $x=a$ şi $y=b$, determinate anterior, despart suprafaţa plană cuprinsă între graficul funcţiei f şi axa Ox în patru regiuni de arii egale.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 - 3X - 1$.

a) Să se determine restul împărţirii polinomului f la $X + 1$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x) < 0$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(2^x) = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2001}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^{2001} - \pi^{2001}}{x - \pi}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\, dt$.

d) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei f.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ şi $C(-1, -2)$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

b) Să se calculeze panta dreptei AB.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei AC.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se verifice că $\hat{a}^3 = \hat{a}$, $(\forall)\ \hat{a} \in \mathbb{Z}_6$.
În inelul $\mathbb{Z}_6$ se consideră $S_k = \hat{1}^k + \hat{2}^k + \hat{3}^k + \hat{4}^k + \hat{5}^k$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze S_1 şi S_2.

c) Să se calculeze S_{2001}.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (5^x + 3^x)(5^{-x} + 3^{-x})$.

a) Să se verifice că $f(x) = 2 + \left(\dfrac{5}{3}\right)^x + \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-x}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $f(x) \geq 4$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se demonstreze că $f^{(n)}(x) = \left(\dfrac{5}{3}\right)^x \left(\ln \dfrac{5}{3}\right)^x + \left(\dfrac{3}{5}\right)^x \left(\ln \dfrac{3}{5}\right)^x$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_2$.

c) Să se arate că matricea B este inversabilă şi să se determine inversa ei.

d) Să se arate că $A \cdot B \neq B \cdot A$.

e) Să se calculeze A^{2001}.

f) Să se arate că $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $(B \cdot A)^n \neq I_2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Utilizând metoda integrării prin părţi, să se arate că $I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

c) Să se arate că $\frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$, $(\forall)$ $x \in [0,1]$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se deducă inegalităţile $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{\pi}} \cdot I_n$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Notăm cu A mulţimea numerelor naturale care se termină cu cifra 2.

- **a)** Să se arate că mulţimea A nu conţine niciun pătrat perfect.
- **b)** Să se găsească un element din mulţimea A care este cub perfect.
- **c)** Să se găsească o submulţime infinită a mulţimii A care nu conţine niciun cub perfect.

2. Numărul 1000 se măreşte cu 20% din valoarea sa şi se obţine numărul a. Numărul a se micşorează cu 20% din valoarea sa şi se obţine numărul b. Numărul 1000 se micşorează cu 20% din valoarea sa şi se obţine numărul c. Numărul c se măreşte cu 20% din valoarea sa şi se obţine numărul d.

- **a)** Să se calculeze a şi b.
- **b)** Să se calculeze c şi d.
- **c)** Să se calculeze $b - d$.

3. Scrierea zecimală a numărului $\frac{17}{909}$ este $0, a_1a_2 \dots a_n \dots$.

- **a)** Să se determine cifrele a_1 şi a_2.
- **b)** Să se determine cifra a_{2001}.
- **c)** Să se calculeze $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2001}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se verifice că $A^2 = 3A$.
- **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.
- **c)** Să se arate că matricea $A - A^2 + A^3 - A^4 + \dots + A^{99} - A^{100}$ are toate elementele strict negative.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

- **a)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1)$.
- **b)** Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
- **c)** Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ şi $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
- **d)** Să se arate că $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 4$.

SUBIECTUL III

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie ”$\circ$” definită prin $x \circ y = x + y + 2$.

- **a)** Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine numărul real e astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
- **d)** Să se determine cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $1 \circ 2 \circ \dots \circ n < 2001$.
- **e)** Să se determine cel mai mare număr natural nenul n, pentru care $3 \circ 3^2 \circ \dots \circ 3^n > 2001$.

2. Să se arate că 5 divide numărul $k^2 - k$, $(\forall)\ k \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL IV

Piramida triunghiulară regulată $ABCD$ are cele şase muchii egale cu a.

a) Să se calculeze aria totală a piramidei.

b) Să se calculeze volumul piramidei.

c) Fie un punct M situat pe înălţimea din vârful A a piramidei. Să se determine lungimea segmentului AM, ştiind că $AM = BM$.

d) Să se arate că muchia AB este perpendiculară pe muchia CD.

e) Fie punctul E situat în interiorul triunghiului BCD. Să se arate că $AE < AB$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. **a)** Să se calculeze $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

b) Să se calculeze $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$.

c) Să se găsească cinci numere naturale nenule şi distincte astfel încât suma inverselor lor să dea 1.

2. La un turneu de tenis participă 2001 de sportivi. Înaintea fiecărui tur, jucătorii rămaşi în turneu se împart în grupe de câte doi, care joacă între ei. Dacă numărul de jucători este impar, atunci un jucător trece în turul următor fără să joace. După fiecare meci între doi jucători, cel învins părăseşte turneul. Turneul se termină când a rămas un singur jucător.

a) Să se afle câte meciuri au fost în primul tur.

b) Să se afle câţi jucători au părăsit turneul după primele trei tururi.

c) Să se afle câte meciuri s-au jucat în tot turneul.

3. Se consideră numărul $A=3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{395}$. Să se arate că:

a) A este un număr natural par.

b) A este divizibil cu 13.

c) A este divizibil cu 40.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x\circ y=-xy+x+y$.

a) Să se verifice că $x\circ y=-(x-1)(y-1)+1$, $(\forall)\ x,\ y\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, $(\forall)\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x\circ 3^x\circ 5^x=1$.

2. **a)** Să se verifice că $\hat{a}^3=\hat{3}$, $(\forall)\ \hat{a}\in\mathbb{Z}_6$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $\hat{a}^{2n+1}=\hat{a}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$, $(\forall)\ \hat{a}\in\mathbb{Z}_6$.

c) Să se calculeze $\hat{1}^{2001}+\hat{2}^{2001}+\hat{3}^{2001}+\hat{4}^{2001}+\hat{5}^{2001}$, în inelul $\mathbb{Z}_6$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2=B^2=I_2$.

b) Să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze inversa ei.

c) Să se arate că $A\cdot B\neq B\cdot A$

d) Să se calculeze A^{2001}.

e) Să se arate că $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$, $(A\cdot B)^n\neq I_2$.

2. **a)** Să se verifice identitatea
$(1-x)(1+x^{2^0})(1+x^{2^1})(1+x^{2^2})\ldots(1+x^{2^{n-1}})=1-x^{2^n}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

b) Să se arate că numerele $2^{2^n}+1$ şi $2^{2^p}+1$ sunt prime între ele, unde $n,\ p\in\mathbb{N}^*$, $n\neq p$.

SUBIECTUL IV

Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia de lungime a.

a) Să se calculeze aria totală a cubului.

b) Să se calculeze volumul cubului.

c) Să se calculeze lungimea segmentului AC'.

d) Să se calculeze măsura unghiului dintre dreptele AC şi AD'.

e) Se consideră un punct M pe faţa $A'B'C'D'$ a cubului. Să se calculeze lungimea minimă şi lungimea maximă a segmentului AM.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Un elev are de rezolvat o temă de vacanţă care conţine 400 de probleme. În prima zi elevul rezolvă o problemă, în a doua zi elevul rezolvă trei probleme, ... , în a n-a zi elevul rezolvă $2n-1$ probleme.

- **a)** Să se afle câte probleme a rezolvat elevul după primele trei zile de lucru.
- **b)** Să se afle câte probleme a rezolvat elevul în a patra zi şi în ziua a 5-a, în total.
- **c)** Să se afle după câte zile termină elevul tema de vacanţă.

2. Notăm cu A mulţimea numerelor de 4 cifre care se pot forma utilizând numai cifrele 5 şi 6.

- **a)** Câte elemente are mulţimea A?
- **b)** Să se afle suma elementelor mulţimii A.
- **c)** Câte elemente din mulţimea A sunt numere pare?

3. Se consideră numerele $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 20$, $b = 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 40$ şi $c = 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot \ldots \cdot 60$.

- **a)** Să se demonstreze că numărul a nu este pătrat perfect.
- **b)** Să se arate că numărul a divide numărul b.
- **c)** Să se arate că numărul b nu divide numărul c.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^5X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, $x_5 \in \mathbb{C}$.

- **a)** Să se verifice că $f = (X^3+1)(X^2+X+1)$.
- **b)** Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ şi $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$.
- **c)** Să se arate că $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 = 5$.

2. Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ şi } abcd = 1 \right\}$.

- **a)** Să se arate că dacă $A \in M$, atunci $\det(A) = 0$.
- **b)** Să se verifice că dacă $A \in M$, atunci $-A \in M$.
- **c)** Să se determine numărul de elemente al mulţimii M.

SUBIECTUL III

1. În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ şi matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se verifice că $I_2 \in G$.
- **b)** Să se arate că dacă A, $B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
- **c)** Să se arate că dacă $A \in G$ şi $\operatorname{rang}(A) < 2$, atunci $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- **d)** Să se găsească o matrice $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu a, $b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ şi $\det(A) = 1$.

2.
- **a)** Să se arate că există a, $b \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a^2 + b^2 = 29$.
- **b)** Să se arate că nu există a, $b \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a^2 + b^2 = 2003$.

SUBIECTUL IV

Piramida patrulateră regulată cu vârful V şi baza $ABCD$ are $VA = AB = a$.

a) Să se calculeze aria laterală a piramidei.

b) Să se calculeze înălţimea piramidei.

c) Să se calculeze volumul piramidei.

d) Să se arate că muchiile VA şi VC sunt perpendiculare.

e) Fie punctul P situat în interiorul pătratului $ABCD$. Să se arate că segmentul VP are lungimea mai mică decât lungimea segmentului VC.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

- **a)** Dezvoltând determinantul d, să se arate că $d = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
- **b)** Utilizând proprietăţile determinanţilor, să se arate că $d = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.
- **c)** Să se demonstreze identitatea $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$.
- **d)** Să se rezolve ecuaţia $8^x + 27^x + 125^x = 3 \cdot 30^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

- **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{1}{x-\pi}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{\pi^2+1}\right)$.
- **c)** Să se calculeze $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- **d)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f.
- **e)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y + 5$.

- **a)** Să se arate că Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(x+1) \circ (x^2+2) = 14$.
- **d)** Să se găsească două elemente $a,\ b \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
- **e)** Să se determine cel mai mic număr natural nenul n pentru care $1 \circ 2 \circ 2 \circ \ldots \circ n > 2001$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \backslash \{-1, -2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+2}$.

- **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, -2\}$.
- **b)** Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, -2\}$.
- **c)** Să se determine asimptotele spre la graficul funcţiei f.
- **d)** Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
- **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\ dt$.
- **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} [f(1) + f(2) + \ldots + f(n)]$.

SUBIECTUL IV

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_2$.

b) Să se calculeze A^{2001}.

c) Să se arate că $A \cdot B \neq B \cdot A$.

d) Să se arate că $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $(A \cdot B)^n \neq I_2$.

e) Să se calculeze $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2001}$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_2$.
- **b)** Să se calculeze A^{2001}.
- **c)** Să se arate că $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- **d)** Să se arate că $(A \cdot B)^{2001} \neq I_2$.
- **e)** Să se calculeze $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2001}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.

- **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^3 - 3x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$.
- **c)** Să se arate că funcţia f are un punct de maxim local şi un punct de minim local.
- **d)** Să se determine punctul de inflexiune al graficului funcţiei f.
- **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = x + y + 5$.

- **a)** Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)$ $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine numărul real e astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
- **d)** Să se determine cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n > 2001$.
- **e)** Să se determine cel mai mare număr natural nenul n, pentru care $2 \circ 2^2 \circ \ldots \circ 2^n < 2001$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$.

- **a)** Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f şi axa Ox.
- **d)** Să se determine $a \in (-1, 1)$ cu proprietatea că dreapta $x = a$ desparte suprafaţa plană cuprinsă între graficul funcţiei f şi axa Ox în două regiuni de arii egale.
- **e)** Să se determine $b \in (0, 1)$ cu proprietatea că dreapta $y = b$ desparte suprafaţa plană cuprinsă între graficul funcţiei f şi axa Ox în două regiuni de arii egale.

SUBIECTUL IV

Se consideră polinomul $f = (X + 1)^{20} + (X - 1)^{20}$ având forma algebrică $f = a_{20}X^{20} + a_{19}X^{19} + \ldots + a_1 X + a_0$.

- **a)** Să se calculeze $f(0)$.
- **b)** Să se determine a_{20}, a_{19} şi a_{18}.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

d) Să se arate că $a_{11} = 0$.

e) Considerăm $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, o rădăcină a polinomului f. Să se arate că $|z + 1| = |z - 1|$.

f) Să se arate că dacă $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ este o rădăcină a polinomului f, atunci $a = 0$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^5 - 1$.

b) Să se verifice că $f = \left(X^2 + \frac{1}{2}X\right)^2 + \left(\frac{1}{2}X + 1\right)^2 + \frac{1}{2}X^2$.

c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+}{x+2}$.

a) Să se verifice că $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

d) Să se arate că funcţia f este concavă pe $[0, \infty)$.

e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\ dx$.

SUBIECTUL II

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n pentru care $A^n = I_2$.

d) Să se calculeze A^{2001}.

e) Să se calculeze $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2001}$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

a) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\ dx$.

e) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} [f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + \ldots + f(\sqrt{n})]$.

SUBIECTUL IV

Fie mulţimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1\}$.

a) Să se arate că, dacă $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, cu a, b, c, d numere întregi, atunci $a = c$ şi $b = d$.

b) Să se arate că $1 \in M$.

c) Să se arate că, dacă z, $w \in M$, atunci $z \cdot w \in M$.

d) Să se arate că, dacă $z \in M$, atunci $\frac{1}{z} \in M$.

e) Să se găsească un element $a + b\sqrt{2} \in M$ cu $b \neq 0$.